

DOI:10.13409/j.cnki.jdpme.20220702001

# 基于高阶动力格式的基底隔震结构地震响应分析\*

施溪溪<sup>1,2</sup>, 李鸿晶<sup>1</sup>, 杜东升<sup>3</sup>

(1. 南京工业大学工程力学研究所, 江苏 南京 211816; 2. 南京科技职业学院, 江苏 南京 210048; 3. 南京工业大学  
土木工程学院, 江苏 南京 211816)

**摘要:** 隔震支座在强烈地震作用下将产生复杂的动力响应, 精确掌握地震响应行为及其规律是研发高质量隔震支座和进行隔震结构设计的基础。在进行结构地震响应分析, 特别是非线性分析时, 采用传统逐步积分方法以及低阶格式建立起的动力时程分析方法都难以达到高精度, 而采用传统高阶时间积分算法则会出现计算过程繁琐, 工作量大等情况。本文采用一种基于高阶动力格式的显式时间积分新式算法, 应用于基底隔震结构的地震响应分析中。首先通过自由度凝聚缩减原理, 建立设置隔震支座钢筋混凝土框架结构简化计算模型; 同时采用隔震支座恢复力双切线本构模型构建基底隔震体系运动方程, 并转化为状态方程; 进而基于微分求积(DQ)原理编制高阶动力格式算法求解状态方程; 最后分析一高层基底隔震结构, 在高、中、低不同频率地震波下地震响应, 验证该方法适用性。结果表明, ①利用静态凝聚技术建立隔震结构模型, 从而构建地震响应状态方程, 是高阶动力分析方法实施的基础。②结构高阶动力分析方法仅通过矩阵乘法运算即可获得结构动力响应, 可较好且高效地用于解决非线性地震响应分析问题。③将结构高阶动力分析方法应用于基底隔震结构, 能获得隔震结构较为精确的分析结果。

**关键词:** 基底隔震结构; 地震响应分析; 微分求积; 状态方程; 高阶时间积分

**中图分类号:** TU375; O325 **文献标识码:** A **文章编号:** 1672-2132(2023)05-1035-11

## Seismic Response Analysis of Base-isolated Buildings by the High-order Dynamic Procedure

SHI Xixi<sup>1,2</sup>, LI Hongjing<sup>1</sup>, DU Dongsheng<sup>3</sup>

(1. Engineering Mechanics Institute, Nanjing Tech University, Nanjing 211816, China;

2. Nanjing Polytechnic Institute, Nanjing 210048, China;

3. College of Civil Engineering, Nanjing Tech University, Nanjing 211816, China)

**Abstract:** The isolation bearings will generate a complex dynamic response under strong earthquake. Accurately understanding its seismic response behavior and laws serves as the basis for developing high-quality isolation bearings and designing isolation structures. In seismic response analysis, especially in nonlinear analysis, the traditional stepwise integration method and low-order time-history analysis methods are difficult to achieve high precision. Meanwhile, the use of traditional high-order time-integration algorithm can lead to a tedious calculation process and heavy workload. This paper applies a new explicit time-integral algorithm based on a high-order dynamic scheme to the seismic re-

\* 收稿日期:2022-07-02;修回日期:2022-07-21

**基金项目:** 国家自然科学基金委-中国地震局地震科学联合基金项目(U2039208)、南京科技职业学院“科研北斗计划自然科学类”(NJPI-2023-3)资助

**作者简介:** 施溪溪(1980—),女,博士研究生。主要从事结构抗震研究。E-mail: xxshi@njpi.edu.cn

**通讯作者:** 李鸿晶(1966—),男,教授,博导,博士。主要从事地震工程研究。E-mail: hjing@njtech.edu.cn

response analysis of base-isolated structures. Firstly, a simplified calculation model of a reinforced concrete frame structure with isolation bearings is established based on the condensation reduction principle of degrees of freedom. Simultaneously, the motion equation of the base isolation system is constructed by using the dual tangent constitutive model of the restoring force of the isolation bearing, and converted into the state equation. Then, based on the differential quadrature (DQ) principle, a high-order dynamic scheme algorithm is developed to solve the state equation; Finally, the seismic response of a high-rise base-isolated structure under high, medium and low frequency seismic waves is analyzed to verify the applicability of this method. The results show that: ① Using static condensation technology to establish the model of isolated structure, and to build the state equation of seismic response, is the basis for the implementation of high-order dynamic analysis method. ② The high-order dynamic analysis method of the structure can obtain the structural dynamic response only through matrix multiplication, which can be used to solve the problem of nonlinear seismic response analysis better and efficiently. ③ Applying the structural high-order dynamic analysis method to the base isolated structure can yield more accurate analysis results of the isolated structure.

**Keywords:** base-isolated structures; seismic response analysis; differential quadrature; state equations; higher-order accurate time integration

## 0 引言

结构控制技术寻求对结构的动力响应过程进行有效控制,从而改变了仅依靠结构体系自身抵抗能力的传统抗震设防途径。其中基底隔震结构已被我国《建筑抗震设计规范》<sup>[1]</sup>列为专门章节予以明确规定,在建筑、桥梁等工程中得到广泛应用<sup>[2-4]</sup>,其中一些隔震房屋经历了实际地震的考验<sup>[5-6]</sup>。基底隔震体系由具有特殊性能的隔震支座和上部结构两部分组成,其水平向基本周期远长于地震地面运动的卓越周期,故地震能量不能有效地输入到上部结构,大大降低了上部结构的振动从而实现地震安全保护的目标。隔震支座的抗震性能很大程度上决定了基底隔震体系的地震安全性,在强烈地震作用下隔震支座将产生复杂的动力响应,精确地掌握其地震响应行为及其规律是研发高质量隔震支座和进行隔震结构设计的基础。

从既有的研究成果上看,基底隔震体系相关研究多集中于理论和试验研究方面<sup>[7-12]</sup>,地震响应分析则采用传统的逐步积分法<sup>[13-14]</sup>。这些动力时程分析方法多是基于低阶格式建立起来的,精度一般不超过二阶。近年来,一些有效的高阶时间积分算法被发展起来,并尝试应用于实际动力问题的求解。高阶时间积分方法一般可通过设置子时步的策略构建高阶的数值格式,例如 Bathe 法<sup>[15]</sup>及其他基于多

个子时步的积分算法<sup>[16-17]</sup>。有些高阶算法则通过时间单元的概念构建数值方案,例如基于微分求积原理或配点法发展的高阶时间积分算法<sup>[18-19]</sup>。但这些高阶算法大多都比较繁琐,计算工作量大,不利于结构地震响应特别是非线性地震响应的分析。李鸿晶等<sup>[20-21]</sup>发展了一种基于时步群的高阶显式时间积分算法(积分求微法),该方法以  $p$  个时步构成一个时步群,针对时步群构造高阶格式并逆用微分求积(differential quadrature, DQ)原理,仅通过矩阵乘法及递推运算即可同时求解出  $p$  个时步的动力响应,实现  $(p+1)$  阶代数精度,为结构线性与非线性地震响应高精度分析提供了一条途径。

本文将针对基底隔震体系的特征,引入具有高阶动力格式的积分求微法,对基底隔震结构开展非线性地震响应分析,以便获得隔震支座及其上部结构的高精度地震响应结果,为基底隔震体系研究和应用提供技术支撑。

## 1 基底隔震体系运动方程

### 1.1 结构模型

钢筋混凝土框架结构是一种常见的建筑结构形式,本文考虑基底设置隔震支座的情形。框架结构只包含水平布置的梁和竖向布置的柱两种结构构件。对于梁单元而言,由于实际建筑结构的楼盖和屋盖在其自身平面内的刚度通常非常大,受到楼

盖或屋盖约束的梁在地震中产生的轴向变形远远小于它的弯曲变形,忽略轴向变形不会带来大的影响和分析误差。因此可以合理地假定梁单元的轴向刚度无穷大,而位于同一楼层内的各个梁单元的结点都具有相等的水平向位移响应。这样,每个梁单元都只考虑结点转动和竖向运动两个自由度。对于柱单元,虽然其轴向刚度通常也比较大,但考虑到结构重力和竖向地震地面运动作用的影响,柱单元的轴向变形不宜忽略。因此,每个柱单元结点需要考虑转动、竖向运动和水平向运动三个自由度。经过这种简化后,框架结构的每个梁柱结点都具有转动和竖向运动两个自由度,每个楼层具有一个水平运动自由度。假定隔震支座不产生轴向变形,即隔震支座相对于地面无竖向位移。

基底隔震框架结构模型如图1所示。假定该建筑被建于状况良好的地基上,不考虑结构-土相互作用的影响。当地面发生往复运动时,地震能量经过隔震支座被输入结构,导致结构产生动态响应。由于隔震支座的存在极大地延长了结构的固有周期,所以结构的加速度响应及其遭受的地震作用被有效地降低了,因而可以合理地认为在地震中上部结构动态响应始终处于弹性范围内,但隔震支座可以进入弹塑性阶段。对于框架结构,各自由度的响应量存在比较大的差异,地震中结构层间位移响应通常是主要因素,故可以认为楼盖(或屋盖)的水平向运动为结构的主自由度,而将包含各结点转动和竖向运动在内的其他自由度作为结构的从自由度。

这样,结构的自由度被分为两部分,分别是由各楼层水平位移响应组成的主自由度向量  $x_s$  和由梁柱结点转角、竖向位移响应组成的从自由度向量  $q_s$ , 即

$$x_s^T = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \quad (1)$$

$$q_s^T = \{\theta_1, y_1, \theta_2, y_2, \dots, \theta_n, y_n\} \quad (2)$$

式中,  $N$  和  $n$  分别为体系的层数和梁柱结点数;  $x_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) 为第  $i$  层相对于地面的水平位移;  $\theta_j, y_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) 分别为结点  $j$  的转角位移和竖向相对位移。

结构无阻尼自由振动方程写为

$$\begin{bmatrix} m_x & \\ & m_q \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_s \\ \ddot{q}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xq} \\ k_{qx} & k_{qq} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_s \\ q_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

式中,  $k_{xx}, k_{xq}, k_{qx}, k_{qq}$  和  $m_x, m_q$  分别为刚度子矩阵和质量子矩阵。其中刚度矩阵可以采用直接刚度法

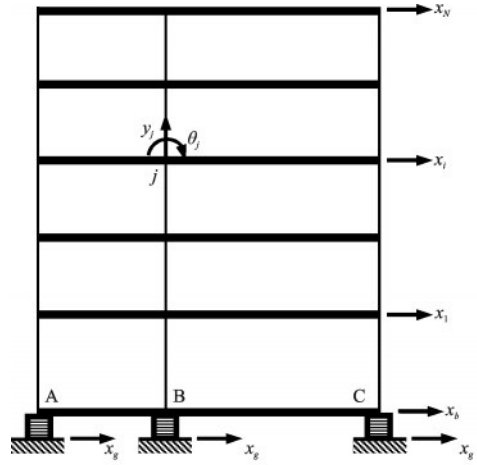


图1 基底隔震框架结构  
Fig.1 Base-isolated frame structure

或有限元法建立,质量矩阵则采用堆聚的方式形成,即认为建筑结构的质只集中于各楼层上,而层间无质量。需要说明的是,在图1所示的隔震体系模型中支座A、B、C处只发生相同的水平位移,而无转角和竖向相对位移。

由于从自由度上的地震响应对结构不起主要作用,可以合理地假定:对于较低阶的频率,由主自由度传递给从自由度的弹性力远比从自由度上的惯性力重要。也就是说,从自由度同主自由度的关系仅由结构的刚度分布特性决定,而惯性特性的影响忽略不计。因此,令从自由度相应的质量子矩阵  $m_q = 0$ , 则由方程(3)的下分块中求得:

$$q_s = -k_{qq}^{-1} k_{qx} x_s \quad (4)$$

利用式(4),方程(3)可以改写为

$$m_x \ddot{x}_s + k_x x_s = 0 \quad (5)$$

其中

$$k_x = k_{xx} - k_{xq} k_{qq}^{-1} k_{qx} \quad (6)$$

显然,方程(5)为标准形式的结构运动方程,且只含有主自由度向量  $x_s$ 。所有从自由度  $q_s$  都已被凝聚掉,但其响应值可由式(4)获得。体系的阻尼特性采用经典的Rayleigh阻尼模型描述,即阻尼矩阵  $c_x$  为质量矩阵  $m_x$  和刚度矩阵  $k_x$  的线性组合,表示为

$$c_x = a_0 m_x + a_1 k_x \quad (7)$$

其中组合系数  $a_0$  和  $a_1$  由体系的任意两阶振型阻尼比确定出来。

以上采用静力凝聚技术处理后结构动力方程中只包含主自由度,大大降低计算工作量的同时又可以保留从自由度对结构地震响应的贡献。

## 1.2 隔震支座恢复力模型

在强烈地震过程中,隔震支座有可能进入弹塑性响应范围,但上部结构应始终保持弹性响应。对于铅芯橡胶支座(LRB),一般可采用 Bouc-Wen 模型和塑性橡胶支座单元模型描述其恢复力特性<sup>[22-23]</sup>。LRB 发生屈服前的初始刚度为  $k_1$ ,屈服后刚度变为

$$k_2 = \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_1 \mu |x_b|^{\mu-1} \quad (8)$$

式中,  $x_b$  为隔震支座水平位移;  $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$  分别为线性元件和非线性元件硬化后屈服刚度比;  $\mu$  为非线性元件硬化指数。

对于由天然叠层橡胶和铅芯棒构成的隔震支座可取  $\alpha_2 = 0$ 。故铅芯橡胶隔震支座的恢复力模型按照图 2 予以确定,其中  $x_{by}$  和  $f_{by}$  分别为支座屈服位移和屈服荷载。此情形下有  $\alpha_1 = k_2/k_1$ ,按照美国 AASHTO 规范<sup>[24]</sup>,支座等效刚度  $k_{eq}$  和等效阻尼比  $\xi_{eq}$  可由下式确定:

$$k_{eq} = \begin{cases} k_1 & (u \leq 1) \\ \alpha_1 k_1 + \frac{1 - \alpha_1}{x_b} f_{by} & (u > 1) \end{cases} \quad (9)$$

$$\xi_{eq} = \begin{cases} 0 & (u \leq 1) \\ \frac{2}{\pi} (1 - \alpha_1) \frac{u - 1}{u^2} \frac{k_1}{k_{eq}} & (u > 1) \end{cases} \quad (10)$$

式中,  $\mu$  为延性比,  $\mu = x_b/x_{by}$ 。

按照该模型,铅芯橡胶隔震支座的恢复力最终可表示为双切线本构模型如下(图 2):

$$f_s(x_b, \dot{x}_b) = k_{eq} x_b \quad (11)$$

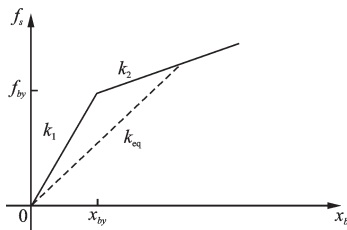


图2 隔震支座恢复力模型

Fig.2 Restoring force model of the isolated bearing

## 1.3 体系状态响应方程

至此,在地震地面加速度  $\ddot{x}_g(t)$  激励下隔震结构的运动方程可以统一地写为:

$$m\ddot{x}_s + c\dot{x}_s + kx_s = -m\gamma\ddot{x}_g + c\gamma\dot{x}_b + k\gamma x_b \quad (12a)$$

$$\sum_{i=1}^N [m_i(\ddot{x}_g + \ddot{x}_i)] + m_b(\ddot{x}_g + \ddot{x}_b) + c_b\dot{x}_b + f_s = 0 \quad (12b)$$

式中,  $m$ 、 $c$  和  $k$  分别为隔震结构的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵,注意到它们是经过静态凝聚处理后的结构特性矩阵,这里略掉了下标“ $x$ ”;  $m_b$  和  $c_b$  分别为隔震支座的质量和阻尼系数;  $x_b(t)$  和  $\dot{x}_b(t)$  分别为隔震支座相对于地面的位移和速度;  $f_s$  表示隔震支座的恢复力,按照式(11)计算;  $\gamma^T = \{1, 1, \dots, 1\}$  为指示向量。

引入状态向量:

$$z^T = \{z_b^T, z_s^T\} = \{x_b, \dot{x}_b, x_s^T, \dot{x}_s^T\} \quad (13)$$

则方程(12)可以写成矩阵形式:

$$\dot{z} = Hz - G\ddot{x}_g \quad (14)$$

式中,  $H$ 、 $G$  分别为与结构特性相关的方阵和向量,表示为

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{k_{eq} + \gamma^T k \gamma}{m_b} & \frac{c_b + \gamma^T c \gamma}{m_b} & \frac{\gamma^T k}{m_b} & \frac{\gamma^T c}{m_b} \\ 0 & 0 & 0 & I_N \\ m^{-1} k \gamma & m^{-1} c \gamma & -m^{-1} k & -m^{-1} c \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \gamma \end{bmatrix}$$

式中,  $I_N$  为  $N$  阶单位阵。

状态方程(14)的初始条件表示为:

$$z^T(0) = z_0^T = \{x_{b0}, \dot{x}_{b0}, x_{s0}^T, \dot{x}_{s0}^T\} \quad (15)$$

式中,  $x_{b0}$ 、 $\dot{x}_{b0}$  分别为隔震支座的初始位移和初始速度;  $x_{s0}$ 、 $\dot{x}_{s0}$  分别表示上部结构的初始位移向量和初始速度向量。

显然,状态方程(14)求解后即可得到隔震支座状态响应  $z_b^T = \{x_b, \dot{x}_b\}$  和隔震结构状态响应  $z_s^T = \{x_s^T, \dot{x}_s^T\}$ 。对于实际隔震体系的地震响应分析问题,直接利用式(14)获得结构地震响应结果几乎是不可能的,一般采用数值解法寻求近似解答。

## 2 隔震体系地震响应高阶分析格式

### 2.1 分析格式

文献[21]中发展了一种高阶动力方法,该方法由文献[20]推广发展的卷积计算方法,逆用 DQ 原

理,构建出的一种高效率的结构动力分析算法。由于卷积积分是通过求导数的方法计算,故也称之为积分求微法。文献[21]对该方法的稳定性、精度及计算效率进行了详细的论证。本文采用该方法求解状态方程(14)。

方程(14)的解可以表示为如下的积分形式:

$$z(t) = e^{Ht} z_0 - \int_0^t e^{H(t-\eta)} G \ddot{x}_g(\eta) d\eta \quad (16)$$

将式(16)积分式中的被积函数做分离处理,并记矩阵指数:

$$\psi(t) = e^{Ht} \quad (17)$$

式(16)可以改写为:

$$z(t) = e^{Ht} [z_0 - \lambda(t)] \quad (18)$$

其中:

$$\lambda(t) = \int_0^t \psi(-\eta) G \ddot{x}_g(\eta) d\eta \quad (19)$$

关于形如式(17)的矩阵指数的计算已经提出了多种方法<sup>[25]</sup>,采用精细积分法<sup>[26]</sup>可以方便地计算出具体时刻 $t_k$ 对应的矩阵指数 $\psi(t_k)$ ,对此本文不再赘述。

一般而言,形如式(19)的含有矩阵指数的积分式 $\lambda(t)$ 是不容易计算的,但其导数则是很容易计算得到。由式(19),函数向量 $\lambda(t)$ 对时间 $t$ 的导数为:

$$\dot{\lambda}(t) = \frac{d}{dt} \lambda = \psi(-t) G \ddot{x}_g(t) \quad (20)$$

由于指定时刻的矩阵指数 $\psi(-t)$ 亦可以使用精细积分法计算获得,所以式(20)中导数向量 $\dot{\lambda}(t)$ 仅经过矩阵与向量的乘法运算即可得到。

根据微分求积(differential quadrature, DQ)原理,函数在给定离散点处的导数值可以表示为定义域内全部离散点处函数值的线性加权和,即

$$\dot{\lambda}_i = \sum_{j=0}^p w_{ij} \lambda_j, \quad i = 0, 1, \dots, p \quad (21)$$

式中, $w_{ij}$ 为DQ权系数; $\lambda_i = \lambda(\tau_i)$ 和 $\dot{\lambda}_i = \dot{\lambda}(\tau_i)$ 分别为 $\lambda(t)$ 在 $\tau = \tau_i$ 时刻的离散向量及其导数向量。这里选择地震时程中的时段 $[t_i, t_j]$ 作为待求解时段,它由 $p$ 个时步组成,如图3所示。本文将该待求解时段 $[t_i, t_j]$ 称为时步群,地震响应是基于该时步群进行计算的,即每次求解都会一次性地获得 $p$ 个时步的全部地震响应。 $\tau$ 为时步群 $[t_i, t_j]$ 内设置的局部坐标,假定各个时步具有相同的步长 $\delta$ ,则该时步群的长度应为:

$$\Delta t_{ij} = t_j - t_i = p \cdot \delta \quad (22)$$

而各采样时刻的坐标写为

$$\tau_k = \frac{k}{p} \Delta t_{ij} = k\delta, \quad k = 0, 1, \dots, p \quad (23)$$

显然有:

$$\tau_0 = 0, \tau_p = p\delta = \Delta t_{ij}$$

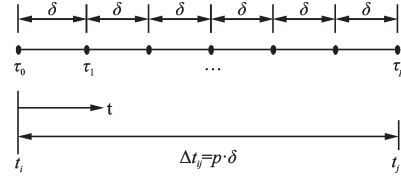


图3 待求解的时步群

Fig.3 Solved time-step group for seismic response

经过离散化处理后,式(19)中函数向量 $\lambda(t)$ 的计算问题转化为对一系列离散向量 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ 的计算。需要注意的是,在每一个时步群内控制方程都要被独立地求解,因而需要先确定向量 $\lambda_0$ ,它是启动求解程序的初始条件。由式(19)可知:

$$\lambda_0 = \int_0^0 \psi(-\eta) G \ddot{x}_g(\eta) d\eta \equiv 0 \quad (24)$$

首先计算向量 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ 的导数,按照式(20),显然有:

$$\dot{\lambda}_k = \dot{\lambda}(\tau_k) = \psi(-\tau_k) G \ddot{x}_g(\tau_k), \quad k = 1, 2, \dots, p \quad (25)$$

若将向量 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ 及其导数向量分别组成一个矩阵,即:

$$\mathbf{\Lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p] \quad (26)$$

和

$$\dot{\mathbf{\Lambda}} = [\dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2, \dots, \dot{\lambda}_p] \quad (27)$$

经过推导,可以得到如下关系:

$$\mathbf{\Lambda} = \dot{\mathbf{\Lambda}} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{S} \quad (28)$$

式中, $\mathbf{V}$ 为 $p$ 阶Vandermonde矩阵; $\mathbf{S}$ 为 $p \times p$ 维转换矩阵,分别表示为:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \tau_1 & \tau_2 & \dots & \tau_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_1^{p-1} & \tau_2^{p-1} & \dots & \tau_p^{p-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \delta & 2\delta & \dots & p\delta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^{p-1} & (2\delta)^{p-1} & \dots & (p\delta)^{p-1} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$S = \begin{bmatrix} \tau_1 & \tau_2 & \cdots & \tau_p \\ \frac{1}{2}\tau_1^2 & \frac{1}{2}\tau_2^2 & \cdots & \frac{1}{2}\tau_p^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{p}\tau_1^p & \frac{1}{p}\tau_2^p & \cdots & \frac{1}{p}\tau_p^p \end{bmatrix} = \delta \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & p \\ \frac{1}{2}\delta & 2\delta & \cdots & \frac{p^2}{2}\delta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{p}\delta^{p-1} & \frac{2^p}{p}\delta^{p-1} & \cdots & p^{p-1}\delta^{p-1} \end{bmatrix} \quad (30)$$

按照式(28)将矩阵  $\mathbf{A} = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p]$  求出后,连同前面计算得到的矩阵指数  $\psi_i = e^{H\tau_i}$  一起,代入式(18)即可获得隔震结构的状态地震响应,即隔震支座和上部结构的位移响应、速度响应都已经包含在状态响应向量  $\mathbf{z}_b = \{x_b, \dot{x}_b\}^T$  和  $\mathbf{z}_s = \{x_s, \dot{x}_s\}^T$  中。

## 2.2 方法验证

由于时间积分算法的性能可以由具有不同周期的单自由度体系的动力响应进行衡量,故通过一个单自由度体系地震响应分析算例验证本文高阶动力算法的正确性和有效性。该单自由度体系的运动方程写为:

$$\ddot{u} + 0.2\pi\dot{u} + (2\pi)^2 u = -4\pi^2 \sin(0.4\pi t) \quad (31)$$

具有初始条件:

$$u(0) = 0, \dot{u}(0) = 2\pi \quad (32)$$

由方程(31)可知,该单自由度体系的固有周期和阻尼比分别为  $T_n = 1.0$  s、 $\xi = 0.05$ ,地震地面加速度时程为  $\ddot{u}_g(t) = 4\pi^2 \sin(0.4\pi t)$ 。

以本文给高阶动力算法计算该单自由度体系的地震响应,选择时步尺度为  $\Delta t = 0.1$  s,显然有  $\Delta t/T_n = 0.1$ ,即一个周期波长使用10个时步进行模拟。设置  $p = 10$ ,即每个时步群包含10个时步,它们的响应会被同时求解出来。

图4和图5分别给出了该单自由度体系的位移响应时程和速度响应时程,为了比较,同时还给出了该问题的解析解和Newmark常平均加速度法的计算结果( $\Delta t = 0.1$  s)。

可以发现,本文高阶动力算法的计算结果与解析解几乎完全吻合,充分体现出高精度的特性。而在相同的步距下Newmark法展现出一定的周期延长(period elongation),本文高阶动力算法较传统的时间积分算法能够取得更高精度的计算结果。

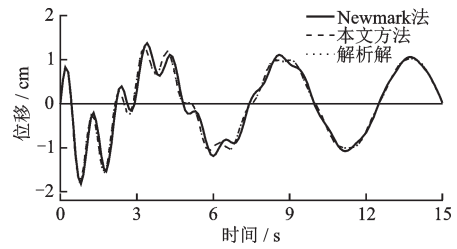


图4 位移响应时程

Fig.4 Time history of displacement

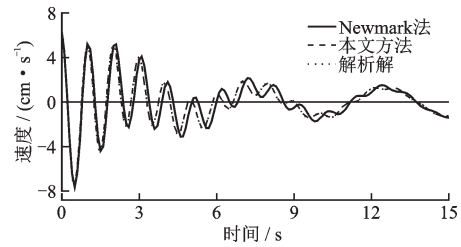


图5 速度响应时程

Fig.5 Time history of velocity

## 3 案例分析

### 3.1 工程概况

选择一幢基底隔震建筑结构<sup>[27]</sup>,采用基于时步群的高阶动力方法分析其地震响应。该建筑位于江苏省宿迁市,为17层现浇钢筋混凝土框架-剪力墙结构,总高度73.9 m,结构方案如图6所示。宿迁市抗震设防烈度为8度,设计基本地震加速度值为0.30g。该案例结构的场地类别为Ⅲ类场地,设计地震分组为第一组,场地特征周期为0.45 s。

该结构基底隔震方案如图7所示,包括LRB1200型铅芯橡胶支座7个、LRB1100型铅芯橡胶支座8个、RB1300型天然橡胶支座5个。隔震支座参数见表1。

### 3.2 地面加速度时程

选择3条典型的地震地面加速度时程记录作为基底隔震结构的外部激励,其相关信息列于表2中,按规范调幅至510 gal进行计算。图8给出了三条地震波调幅后的时程。

图9给出了三条地震波的Fourier幅值谱。可以看出所选择的地震地面运动时程覆盖了从较低频率(Northridge地震)直至较高频率(Parkfield地震)范围的地震动。

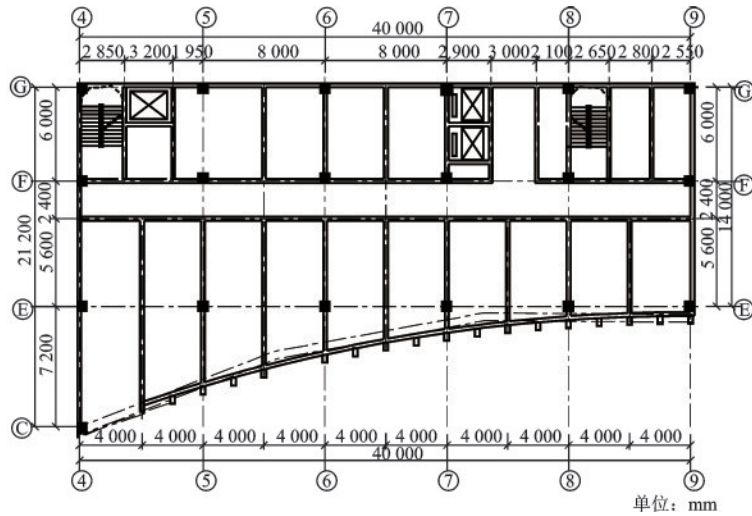


图6 标准层平面图示意

Fig.6 Diagram of the base-isolated structure

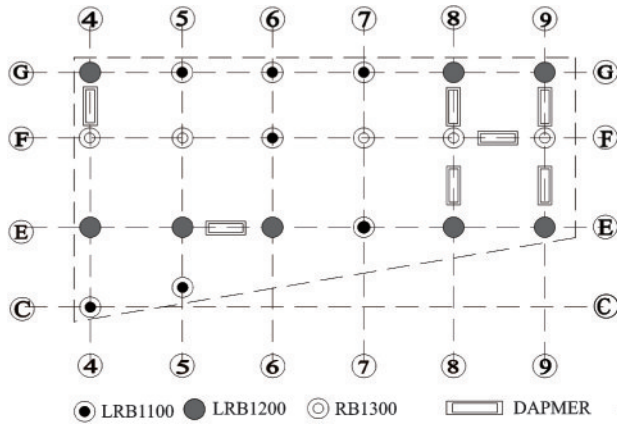


图7 隔震支座布置示意

Fig.7 Layout of base-isolation bearings

表1 隔震支座参数

Table 1 Parameters of isolation bearings

支座 型号	$k_1 / (\text{kN} \cdot \text{mm}^{-1})$	$k_2 / (\text{kN} \cdot \text{mm}^{-1})$	$f_{by} / \text{kN}$	$k_{eq} / (\text{kN} \cdot \text{mm}^{-1})$	$\xi_{eq}$
LRB 1100	23.89	1.837	160.3	2.95	24.3
LRB 1200	28.40	2.184	180.9	3.42	21.9
RB 1300	-	-	-	2.52	-

### 3.3 隔震体系动力响应分析

#### 3.3.1 体系动力特性

首先分析该基底隔震结构的固有振动特性,其前6阶振动周期的计算结果列于表3中。作为对

表2 地震记录信息

Table 2 Information of the seismograms

地震名称	台站	峰值加速 度/gal	持时/s	卓越周 期/s
Northridge	090CDMG	557.5	39.88	0.82
Imperial Valley	EI Centro#9	342.1	53.74	0.68
Parkfield	CHOL- AME#5	135.0	43.91	0.18

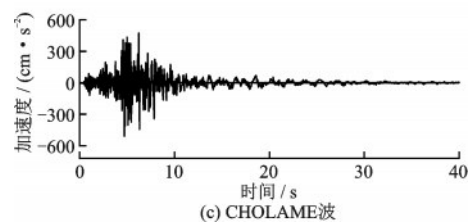
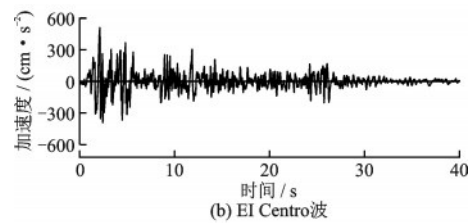
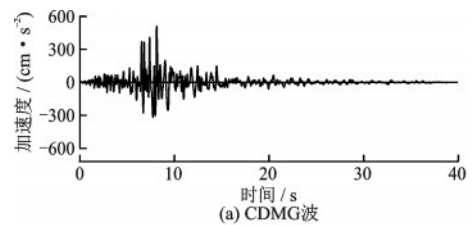


图8 地面加速度时程

Fig.8 Time-histories of ground accelerations

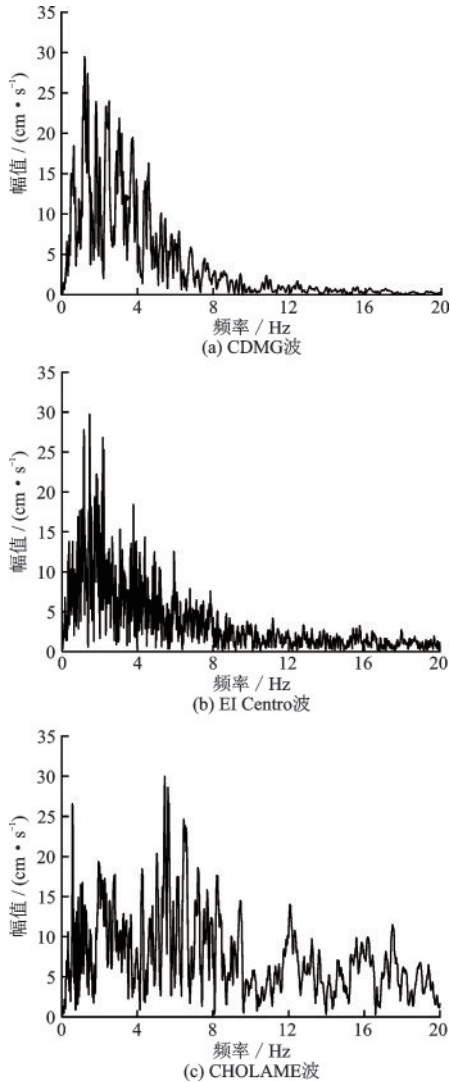


图9 地面加速度 Fourier 幅值谱

Fig.9 Fourier's amplitude spectra of ground accelerations

比,将未设置隔震支座的同一结构的固有振动周期亦计算出来。可以看出,进行基底隔震后体系的基本周期大幅度延长,由未进行基底隔震情形的1.713 s延长至4.631 s,已经大幅度地远离了地震地面运动的卓越周期。

表3 体系前6阶振型固有振动周期

Table 3 Natural vibration periods of the system

单位:s

	1阶	2阶	3阶	4阶	5阶	6阶
隔震	4.631	0.975	0.525	0.377	0.289	0.229
非隔	1.713	0.652	0.426	0.321	0.250	0.203

### 3.3.2 地震响应分析

采用本文的高阶动力格式分析案例结构地震响应。按式(24)计算获得各个时点处的变上限积

分函数向量  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  及其相应的矩阵指数后  $\Psi_i (i=1, 2, \dots, p)$  将它们连同初始条件  $z_0$  代入式(18),即可获得隔震支座状态响应向量  $z_b = \{x_b, \dot{x}_b\}^T$ 。采用高阶动力格式分析同时可获得上部结构状态响应向量  $z_s = \{x_s, \dot{x}_s\}^T$ ,得到各楼层位移响应。

图10为三条地震波之下,结构隔震支座和顶层的位移时程情况,其动力响应幅值及出现时间示于表4。

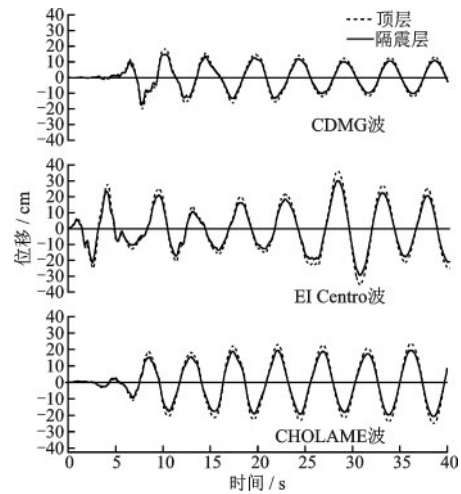


图10 三种地震波下相对位移响应

Fig.10 Relative displacement response under three seismic waves

表4 动力响应幅值及出现时间

Table 4 Response amplitude and occurrence time

	CDMG	EI Centro	CHOLAME
$x_{b\max}/\text{cm}$	17.99	24.06	20.37
$Tx_{b\max}/\text{s}$	7.82	4.02	33.81
$x_{17\max}/\text{cm}$	20.59	28.15	24.88
$Tx_{17\max}/\text{s}$	7.71	4.14	33.88
$\ddot{x}_{b\max}/(\text{cm}\cdot\text{s}^{-2})$	178.14	83.78	48.66
$T\ddot{x}_{b\max}/\text{s}$	3.56	3.96	19.69
$\ddot{x}_{17\max}/(\text{cm}\cdot\text{s}^{-2})$	102.54	123.55	85.33
$T\ddot{x}_{17\max}/\text{s}$	4.21	2.69	8.48

隔震层在三种罕遇地震波作用下的最大位移为分别为 179.9 mm (CDMG 波)、240.6 mm (EI Centro 波) 和 203.7 mm (CHOLAME 波),对于 LRB1100 规格的支座,该水平位移远小于 0.55D (0.55D=605 mm) 和 300% 的剪应变 (300%  $\gamma=609$  mm),符合建筑抗震设计规范 12.2.3 第 1 条隔震层最大允许位移限值的要求。

由图 10 可以看出,由于底部隔震层刚度很小,隔绝大部分的地震波能量,所以隔震体系水平位移主要集中在隔震层。结合表 4 可知,地震波作用下隔震建筑的顶层位移幅值与隔震层位移幅值几乎同时出现,且上部结构位移相对于隔震层非常小,显示该结构在地震作用下几乎处于整体平动的运动状态。

图 11~13 显示了三种地震波之下的隔震层与顶层加速度响应时程曲线。经过侧向刚度较小的隔震层之后,原始地震波有很大幅度衰减,隔震层以上的楼层绝对加速度均有不同幅度的减小。顶层加速度响应分别为  $102.54 \text{ cm/s}^2$  (CDMG)、 $123.55 \text{ cm/s}^2$  (El Centro)、 $85.33 \text{ cm/s}^2$  (CHOLAME)。

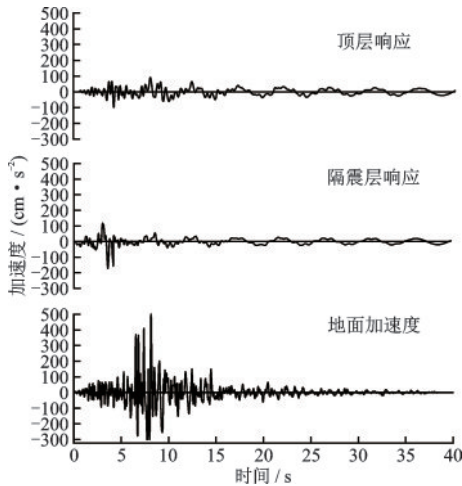


图 11 CDMG 下结构加速度响应

Fig.11 Structural acceleration response under CDMG

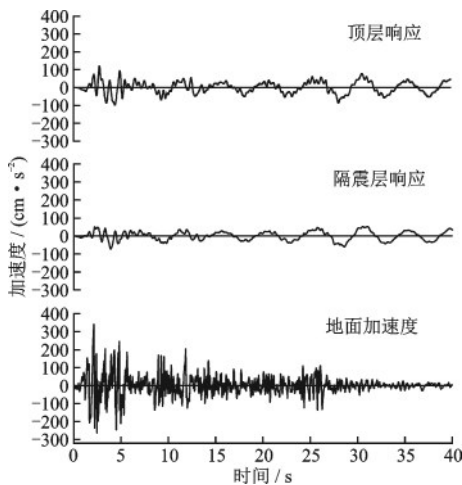


图 12 El Centro 下结构加速度响应

Fig.12 Structural acceleration response under El Centro

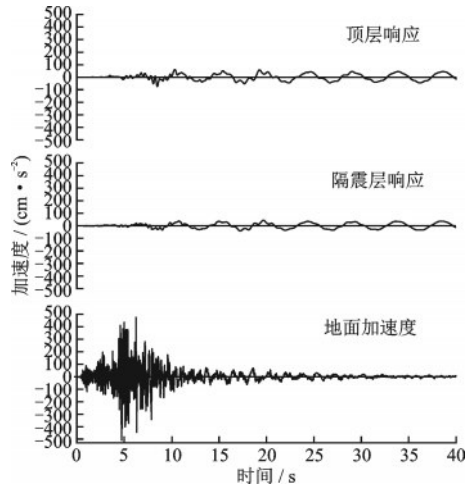


图 13 CHOLAME 下结构加速度响应

Fig.13 Structural acceleration response under CHOLAME

图 14 为三种地震波下隔震结构的频谱图像。振动频率主要集中于  $0.2$ 、 $0.925$ 、 $1.875 \text{ Hz}$  (CDMG)、 $0.2$ 、 $1.05$ 、 $1.95 \text{ Hz}$  (El Centro) 以及  $0.225$ 、 $1.1$ 、 $1.95 \text{ Hz}$  (CHOLAME) 附近,与表 3 中结构的前三阶频率  $0.216$ 、 $1.026$ 、 $1.905 \text{ Hz}$  基本相近。同时,从幅值规律来看,图 14(a) 的顶部和隔震层分布接近,图 14(b)、(c) 显示顶部和隔震层幅值分布更为一致。

图 15 为隔震结构在三条地震波下各楼层剪力幅值的变化曲线,隔震结构最大楼层基底剪力分别为  $12\ 170 \text{ kN}$  (CDMG 波)、 $16\ 300 \text{ kN}$  (El Centro 波)、 $13\ 157 \text{ kN}$  (CHOLAME 波),最大顶层剪力分别为  $1\ 084 \text{ kN}$  (CDMG 波)、 $1\ 181 \text{ kN}$  (El Centro 波)、 $846 \text{ kN}$  (CHOLAME 波)。

## 4 结 论

本文将结构动力问题的高阶分析方法推广应用于基底隔震结构的动力响应分析,主要结论如下:

(1) 通过静态凝聚技术建立隔震结构模型,连同隔震层构建隔震结构的地震响应状态方程,为高阶动力分析方法的实施奠定了基础。

(2) 结构高阶动力分析方法可较好用于解决非线性地震响应分析问题。对于基底隔震结构,需要在各时步群组中判断隔震支座是否改变刚度,并且只需修改状态方程中的结构特性矩阵  $H$  即可完成非线性地震响应分析,而不影响高阶动力格式的执行过程,即仍然能够仅通过矩阵乘法运算即可获得结构动力响应。

(3) 结构动力分析方法通过一步运算能同时获

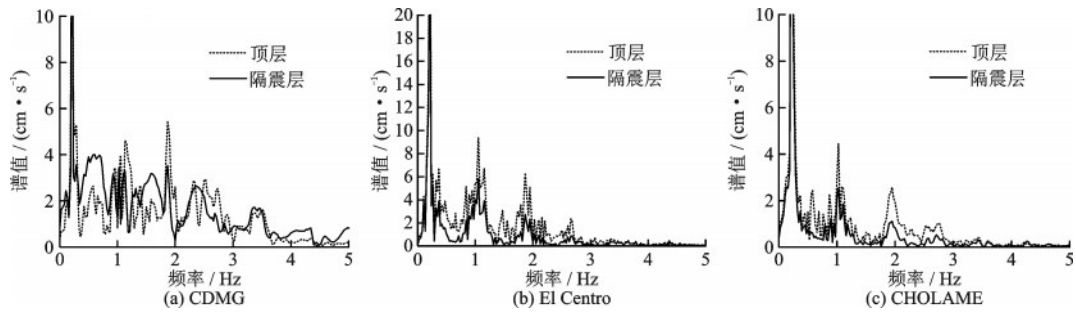


图14 隔震结构 Fourier 幅值谱

Fig.14 Fourier amplitude spectrum of the isolated structure

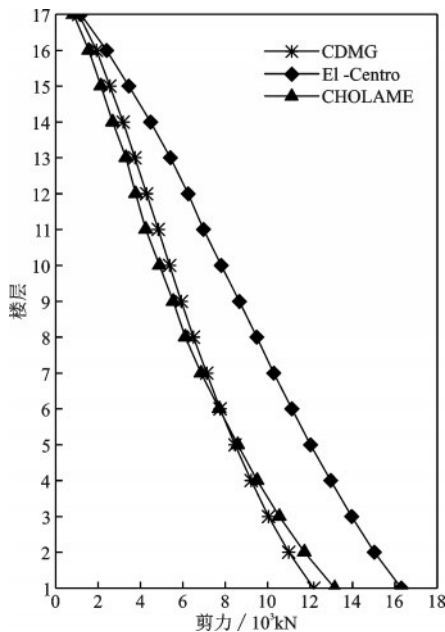


图15 楼层剪力幅值

Fig.15 Shear amplitude of each floor

得多个时步动力响应,用于非线性动力分析时可以灵活调整非线性时段内需要求解的时步群组数量,这样可以最大限度地降低修改结构特性矩阵的工作量,从而发挥结构高阶动力分析方法高效率的优势。

(4) 将结构高阶动力分析方法应用于基底隔震结构,可以方便地求解隔震层和上部结构地震响应的高精度结果。实际算例表明,对于不同特性的地震地面运动激励,该方法都能快速获得隔震结构较为精确的分析结果。

### 参考文献:

[1] 建筑抗震设计规范: GB 50011—2010[S].北京: 中国建筑工业出版社,2016.  
 [2] Spencer B F, Nagarajaiah S. State of the art of structural control [J]. Journal of Structural Engineering,

ASCE, 2003, 129(7): 845-856.

[3] 周锡元, 阎维明, 杨润林. 建筑结构的隔震、减震和振动控制[J]. 建筑结构学报, 2002, 23(2): 2-12, 26.  
 Zhou X Y, Yan W M, Yang R L. Seismic base isolation, energy dissipation and vibration control of building structures [J]. Journal of Building Structures, 2002, 23(2): 2-12, 26. (in Chinese)  
 [4] 范立础, 王志强. 我国桥梁隔震技术的应用[J]. 振动工程学报, 1999, 12(2): 173-181.  
 Fan L C, Wang Z Q. Application of seismic isolation technology for bridges in China [J]. Journal of Vibration Engineering, 1999, 12(2): 173-181. (in Chinese)  
 [5] 周福霖. 工程结构减震控制[M]. 北京: 地震出版社, 1997: 15-60.  
 Zhou F L. Building structure seismic control [M]. Beijing: China Seismological Press, 1997: 15-60. (in Chinese)  
 [6] Mehmet C. Successful performance of a base-isolated hospital building during the 17 January 1994 Northridge earthquake [J]. The Structural Design of Tall Building, 1996, 5: 95-109.  
 [7] Nagarajaiah S, Sahasrabudhe S. Seismic response control of smart sliding isolated buildings using variable stiffness systems: An experimental and numerical study [J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 2006, 35(11): 177-197.  
 [8] 唐家祥, 李黎, 李英杰. 叠层橡胶基础隔震房屋结构设计与研究[J]. 建筑结构学报, 1996, 17(2): 37-47.  
 Tang J X, Li L, Li Y J. Design and research of base-isolated building with laminated rubber bearings [J]. Journal of Building Structures, 1996, 17(2): 37-47. (in Chinese)  
 [9] 周锡元, 韩森. 橡胶支座与RC柱串联隔震系统水平刚度系数[J]. 振动工程学报, 1999, 12(2): 157-165.  
 Zhou X Y, Han S. Horizontal rigidity coefficient of the serial system of rubber bearing with column [J]. Journal of Vibration Engineering, 1999, 12(2): 157-165. (in

- Chinese)
- [10] 周云, 徐彤, 贺明玄. 基础隔震结构的能量设计方法 [J]. 地震工程与工程振动, 2000, 20(3): 116-122.  
Zhou Y, Xu T, He M X. Study of design method for base-isolation structures based on energy theory [J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2000, 20(3): 116-122. (in Chinese)
- [11] 张敏政, 孟庆利, 裴强. 叠层橡胶隔震支座的动态稳定性和力学特性研究 [J]. 地震工程与工程振动, 2002, 22(5): 85-91.  
Zhang M Z, Meng Q L, Pei Q. Dynamic stability and mechanical behaviors of laminated rubber bearings [J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2002, 22(5): 85-91. (in Chinese)
- [12] 李宏男, 吴香香. 橡胶垫隔震支座结构高宽比限值研究 [J]. 建筑结构学报, 2003, 24(2): 14-19.  
Li H N, Wu X X. Study on limit of height-to-width ratio for base-isolated buildings with rubber bearings under earthquake [J]. Journal of Building Structures, 2003, 24(2): 14-19. (in Chinese)
- [13] Nagarajaiah S, Reinborn A M, Constantinou M C. Nonlinear dynamic analysis 3-D base isolation structures [J]. Journal of Structural Engineering, ASCE, 1991, 117: 2035-2054.
- [14] Jangid R S, Datta T K. Nonlinear response of torsionally coupled base isolated structure [J]. Journal of Structural Engineering, ASCE, 1994, 120: 1-2.
- [15] Bathe K J, Baig M M I. On a composite implicit time integration procedure for nonlinear dynamics [J]. Computers and Structures, 2005, 83: 2513-2524.
- [16] Fung T C. Complex-time-step Newmark methods with controllable numerical dissipation [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1998, 41: 65-93.
- [17] Kim W, Choi S Y. An improved implicit time integration algorithm: The generalized composite time integration algorithm [J]. Computers and Structures, 2018, 196: 341-354.
- [18] Fung T C. Solving initial problems by differential quadrature method — Part 2: second- and higher-order equations [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2001, 50: 1429-1454.
- [19] Kim W, Reddy J N. A new family of higher-order time integration algorithms for the analysis of structural dynamics [J]. Journal of Applied Mechanics, 2017, 84: 071008.
- [20] 李鸿晶, 梅雨辰, 任永亮. 一种结构动力时程分析的积分求微方法 [J]. 力学学报, 2019, 51(5): 1507-1516.  
Li H J, Mei Y C, Ren Y L. An integral differentiation procedure for dynamic time-history response analysis of structures [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2019, 51(5): 1507-1516. (in Chinese)
- [21] 李鸿晶, 杨筱朋, 梅雨辰. 一种多自由度阻尼体系动力问题的高阶分析方法 [J]. 工程力学, 2021, 38(1): 15-26.  
Li H J, Yang X P, Mei Y C. A high-order procedure for dynamics of multi-degree-of-freedom damping systems [J]. Engineering Mechanics, 2021, 38(1): 15-26. (in Chinese)
- [22] Elastomeric Bearing (BoucWen) Element [EB/OL]. [2016-10-21] [https://opensees.berkeley.edu/wiki/index.php/Elastomeric\\_Bearing\\_\(Bouc-Wen\)\\_Element](https://opensees.berkeley.edu/wiki/index.php/Elastomeric_Bearing_(Bouc-Wen)_Element).
- [23] ElastomericBearing (Plasticity) Element [EB/OL]. [2016-10-19] [https://opensees.berkeley.edu/wiki/index.php?title=Elastomeric\\_Bearing\\_\(Plasticity\)\\_Element&oldid=12326](https://opensees.berkeley.edu/wiki/index.php?title=Elastomeric_Bearing_(Plasticity)_Element&oldid=12326).
- [24] Aashto LRFD Bridge Design Specifications [S]. AASHTO STD (SI Units 4th Edition 2007).
- [25] Moler C, Van Loan C. Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later [J]. SIAM Review, 2003, 45(1): 3.
- [26] 钟万勰. 结构动力方程的精细时程积分法 [J]. 大连理工大学学报, 1994, 34(2): 131-136.  
Zhong W X. On precise time-integration method for structural dynamics [J]. Journal of Dalian University of Technology, 1994, 34(2): 131-136. (in Chinese)
- [27] 章征涛, 刘伟庆, 王曙光, 等. 组合隔震技术在某高层结构中的应用 [J]. 建筑结构, 2017, 47(8): 87-92.  
Zhang Z T, Liu W Q, Wang S G, et al. Application of hybrid base-isolation technology in a high-rise building [J]. Building Structure, 2017, 47(8): 87-92. (in Chinese)

(本文编辑: 苏泽云)